

II

2006. $ab = 80 \text{ dm}^2$ és $b = \frac{5}{8}a \Rightarrow \frac{5}{8}a^2 = 80 \Rightarrow a = 8\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow b = 5\sqrt{2} \text{ cm} \approx \underline{7,07 \text{ cm}}$ a cső magassága. $2r\pi = a - 2 \Rightarrow 2r = \frac{a-2}{\pi} \Rightarrow 2r \approx \underline{2,96 \text{ dm}}$ a cső átmérője.

2007. $m \approx \underline{1,27 \text{ m}}$.

2008. $r \approx \underline{2,77 \text{ dm}}$ az alapkör sugara, $m \approx \underline{8,31 \text{ dm}}$ az edény magassága.

2009. $t_p = 2r\pi m = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi \Rightarrow r^2\pi = \frac{t_p}{4}$, valamint $t_p = 2r\pi m = m^2\pi \Rightarrow m = \sqrt{\frac{t_p}{\pi}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow V = r^2\pi m = \frac{t_p}{4} \cdot \sqrt{\frac{t_p}{\pi}} = \frac{25}{4} \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}} \approx \underline{17,625 \text{ m}^3}$.

2010. $A \approx \underline{471,24 \text{ m}^2}$.

2011. $2r = 7,5 \text{ m} \Rightarrow r = 3,75 \text{ m}$. 1 óra alatt $82 \text{ hl} = 8200 \text{ l víz} \Rightarrow 4 \text{ óra alatt } 32800 \text{ l} = 32800 \text{ dm}^3 = 32,8 \text{ m}^3$ víz. $32,8 = r^2\pi h = 14,0625\pi h \Rightarrow h \approx \underline{0,74 \text{ m}}$ -t emelkedik a vízszint 4 óra alatt.

2012. Percenként a gőzszükséglet: $60 \cdot r^2\pi m \approx 6650123,33 \text{ cm}^3 \approx \underline{6,65 \text{ m}^3}$.

2013. Percenkénti vízzállítás: $0,9 \cdot 100 \cdot r^2\pi m \approx 1053501,68 \text{ cm}^3 \approx \underline{1,053 \text{ m}^3}$.

2014. Idő = $\frac{V}{r^2\pi m} \approx 159,15 \text{ perc} \approx \underline{9550 \text{ másodperc}}$.

2015. $2r = 0,0324 \text{ dm} = \underline{3,24 \text{ mm}}$.

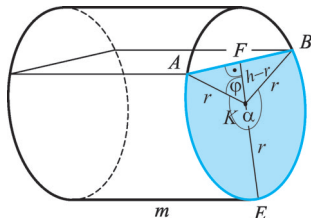
2016. Tekintsük az 1993. ábrát. $V = r^2\pi m - (r-d)^2\pi m = \pi m (r^2 - (r-d)^2) = \pi \cdot 9 \cdot (3,5^2 - 2,6^2) \Rightarrow V \approx 155,23 \text{ dm}^3 \Rightarrow$ a tömeg = $V \cdot \rho \approx \underline{1151,8 \text{ kg}}$.

2017. $V_{\text{ólom}} = ((0,17 \text{ dm})^2 \cdot \pi - (0,15 \text{ dm})^2 \cdot \pi) \cdot 10 \text{ dm} \approx 0,201 \text{ dm}^3$. $V_{\text{réz}} = 3 \cdot (0,033 \text{ dm})^2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ dm} \approx 0,103 \text{ dm}^3$. $V_{\text{szigetelés}} = (0,15 \text{ dm})^2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ dm} - V_{\text{réz}} \approx 0,604 \text{ dm}^3$. $m_{\text{ólom}} + m_{\text{réz}} + m_{\text{szigetelés}} = V_{\text{ólom}} \cdot \rho_{\text{ólom}} + V_{\text{réz}} \cdot \rho_{\text{réz}} + V_{\text{szigetelés}} \cdot \rho_{\text{szigetelés}} \approx \underline{3,7484 \text{ kg}}$.

2018. Tekintsük az 1993. ábrát. Jelölje a magasságot h és a tömeget m ! $k = 2R\pi \Rightarrow R \approx 1,43 \text{ dm}$. $m = V \cdot \rho = (R^2 - r^2) \cdot \pi \cdot h \cdot \rho$, azaz $650 = (1,43^2 - r^2) \cdot \pi \cdot 36 \cdot 7,5 \Rightarrow r \approx 1,13 \text{ dm}$. Az oszlop falának vastagsága: $R - r \approx \underline{3 \text{ cm}}$.

2019. $2r = 150 \text{ cm}$; $m = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$; $h = 0,8 \cdot 2r = 1,6r$; $FK = h - r = 0,6r \Rightarrow \cos \varphi = 0,6 \Rightarrow \varphi \approx 53,13^\circ \Rightarrow 2\varphi \approx 106,26^\circ \Rightarrow \alpha \approx 253,74^\circ$.

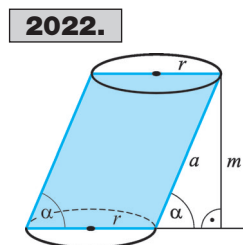
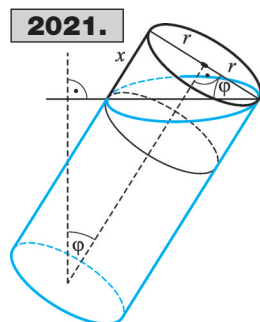
2019.



$$V = t \cdot m = \left[r^2 \pi \cdot \frac{253,74^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 106,26^\circ \right] \cdot m \approx 7578 \text{ dm}^3.$$

Kb. 7578 l víz van a kazánban.

2020. Tekintsük a 2005. ábrát. $EF = 12 \text{ cm}$ és $r = 15 \text{ cm} \Rightarrow \Rightarrow KF = 3 \text{ cm} \Rightarrow \cos \varphi = 0,2 \Rightarrow \varphi \approx 78,5^\circ \Rightarrow 2\varphi \approx 157^\circ$. $r^2\pi \cdot m \cdot \rho = t \cdot m \Rightarrow r^2\pi \cdot \rho = r^2\pi \cdot \frac{157^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin 157^\circ \Rightarrow \pi \cdot \rho \approx 1,37 - 0,195 \Rightarrow \rho = \underline{0,374 \text{ kg/dm}^3}$.



2021. Legyen $m = 4r$. $V = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$; $V = r^2\pi \cdot 4r = 4r^3\pi \Rightarrow r \approx 4,3 \text{ cm}$! $\varphi = 36,57^\circ$;
 $\text{tg } \varphi = \frac{x}{2r}$.

A kiömlő folyadék térfogata: $V_1 = \frac{1}{2} \cdot r^2\pi x = \frac{1}{2} r^2\pi \cdot 2r \cdot \text{tg } \varphi = r^3\pi \cdot \text{tg } \varphi \approx 185,3 \text{ cm}^3$.

Az edényben maradt folyadék: $V - V_1 \approx 1000 \text{ cm}^3 - 185,3 \text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{814,7 \text{ cm}^3}}$.

2022. $t = 2r \cdot a \cdot \sin \alpha \approx \underline{\underline{5,73 \text{ m}^2}}$.

2023. Tekintsük a 2022. ábrát! $m = a \cdot \sin \alpha$. $V = r^2\pi m = r^2\pi a \cdot \sin \alpha \approx \underline{\underline{1986,5 \text{ cm}^3}}$.

2024. A 2022. ábra jelöléseit használjuk. $k = m \cdot 5 \Rightarrow 2r\pi = 5 \cdot a \cdot \sin \alpha \Rightarrow r = \frac{5a \sin \alpha}{2\pi}$.

$V = r^2\pi m = r^2\pi \cdot a \cdot \sin \alpha = \left(\frac{5a \sin \alpha}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin \alpha = \frac{25a^3 \cdot \sin^3 \alpha}{4\pi} \approx \underline{\underline{5302 \text{ dm}^3}}$.

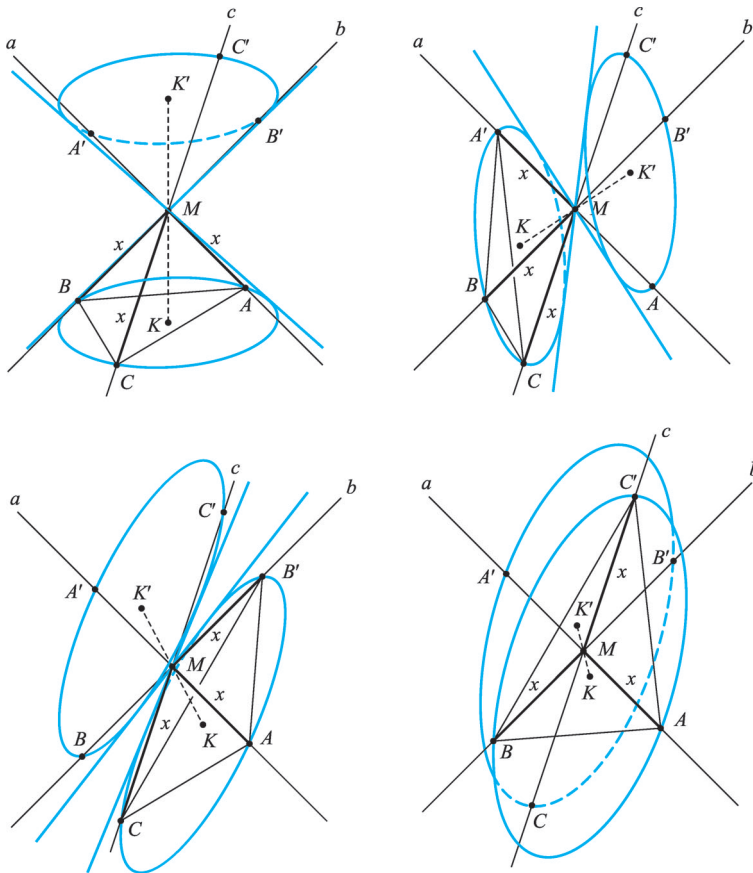
2025. Tekintsük a 2022. ábrát! $m = a \cdot \sin \alpha$; $t = 2r \cdot a \cdot \sin \alpha \Rightarrow r \approx 9,09 \text{ dm} \Rightarrow V \approx \underline{\underline{5061,2 \text{ dm}^3}}$.

Kúp, csonkakúp



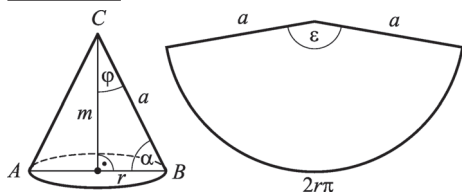
Kúp

2026.



2026. Az egyenesek közös M pontjából mérjük fel mindhárom egyenesre x hosszúságú szakaszt, így az a -n A , a b -n B és a c -n C pontot kapunk. Az A , B és C pontok háromszöget alkotnak az egyenesek helyzete miatt. Az $ABC\Delta$ körülírt köre k . M rajta van az AB , illetve a BC szakaszok felezőmerőleges síkján, ezért M merőleges vetülete ABC síkra a k kör K középpontja. A kúp forgástengelye az MK egyenes, csúcsa M . Négy forgáskúpot találunk a három egyeneshez.

2027.



2027. $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow m^2 = a^2 - r^2$.

- a) $m = 8$ cm; b) $m \approx 93,05$ cm; c) $m \approx 0,088$ m.

2028. a) $a \approx \underline{5,24 \text{ cm}}$; b) $a \approx \underline{25,09 \text{ dm}}$; c) $a \approx \underline{142,9 \text{ cm}}$.

2029. a) $r \approx \underline{5,36 \text{ dm}}$; b) $r \approx \underline{3,86 \text{ cm}}$; c) $r \approx \underline{99,75 \text{ mm}}$.

2030. A 2027. ábra jelöléseivel: a) $\frac{r}{a} = \sin \varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{56,8^\circ}$; b) $\frac{m}{a} = \cos \varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{89^\circ}$;

c) $\frac{r}{m} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow 2\varphi \approx \underline{79,7^\circ}$.

2031. A 2027. ábra jelöléseivel: $\frac{2r\pi}{2a\pi} = \frac{\varepsilon}{360^\circ} \Rightarrow \varepsilon = \frac{r}{a} \cdot 360^\circ$. a) $\varepsilon = \underline{225^\circ}$; b) $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow r \approx 8,46 \text{ cm} \Rightarrow \varepsilon \approx \underline{242,5^\circ}$.

2032. $CT = CK \cdot \sin \varphi = 5\sqrt{3} \text{ cm}$ ($\approx 8,66 \text{ cm}$) a magasság. $KT = CK \cdot \cos \varphi = 5 \text{ cm} = KB \Rightarrow T \equiv B \Rightarrow CB = 5\sqrt{3} \text{ cm}$ a legrövidebb alkotó. $ABC\Delta$ -ben $CB = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$ és $ABC\angle = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 5\sqrt{7} \text{ cm}$ ($\approx 13,23 \text{ cm}$) a leghosszabb alkotó.

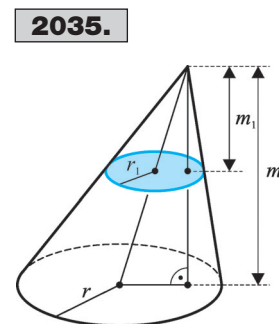
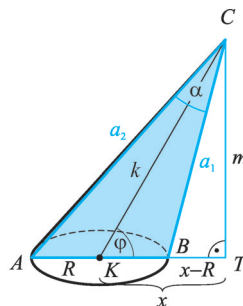
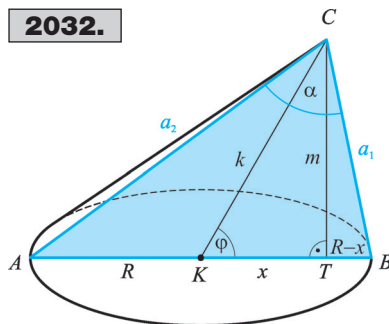
2033. Tekintsük a 2032. ábrát. Legyen $KT = x \Rightarrow AT = R + x$ és $BT = |R - x|$. (1) $k^2 = m^2 + x^2$; (2) $a_1^2 = m^2 + |R - x|^2$; (3) $a_2^2 = m^2 + (R + x)^2$; (2) és (3) $\Rightarrow a_2^2 - a_1^2 = 4Rx$, valamint (2) és (1) $\Rightarrow R^2 = 2Rx + a_1^2 - k^2 \Rightarrow R \approx \underline{17,7 \text{ cm}}$ mindkét esetben.

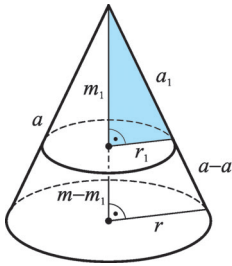
2034. A 2032. ábra jelöléseivel: legyen $KT = x \Rightarrow AT = R + x$ és $BT = |R - x|$. (1) $a_1^2 = m^2 + |x - R|^2$; (2) $k^2 = m^2 + x^2$; (3) $a_2^2 = m^2 + (R + x)^2$; (1) és (3) $\Rightarrow a_2^2 - a_1^2 = 4Rx \Rightarrow x \approx 45,8 \text{ cm} \Rightarrow$ **1. esetben** $BT = R - x < 0 \Rightarrow$ nincs ilyen test. **2. esetben** $BT = x - R \approx 14,1 \text{ cm} \Rightarrow m \approx 50,67 \text{ cm} \Rightarrow k \approx \underline{68,3 \text{ cm}}$.

2035. A metszet is kör, hasonló az alapkörhöz. A hasonlóság aránya $\frac{m_1}{m} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 \Rightarrow t_1 = \left(\frac{m_1}{m}\right)^2 \cdot t$. a) $t_1 = \frac{1}{4} r^2 \pi$; b) $t_1 = \frac{1}{16} r^2 \pi$; c) $t_1 = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \cdot r^2 \pi$.

2036. a) $A = 388,7\pi \approx \underline{1221,1 \text{ cm}^2}$; b) $A = 216\pi \approx \underline{678,6 \text{ dm}^2}$; c) $A \approx 9878,8\pi \approx \underline{31035 \text{ mm}^2}$.

2037. A 2027. ábra jelöléseit használjuk. $A = r(r+a) \cdot \pi$; $t = r \cdot m \Rightarrow m = \frac{t}{r}$; $a^2 = r^2 + m^2 = r^2 + \frac{t^2}{r^2} \Rightarrow (ar)^2 = r^4 + t^2$, valamint $\frac{A}{\pi} = r^2 + ar \Rightarrow ar = \frac{A}{\pi} - r^2$. Az aláhúzottakból követke-



2044.

zik, hogy $\left(\frac{A}{\pi} - r^2\right)^2 = r^4 + t^2 \Rightarrow r^2 = \frac{\pi}{2A} \cdot \left(\frac{A^2}{\pi^2} - t^2\right) \Rightarrow r \approx \underline{\underline{12,88 \text{ cm}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow m \approx \underline{\underline{15,8 \text{ cm}}}$ és $a \approx \underline{\underline{20,38 \text{ cm}}}$.

2038. $r = \underline{\underline{5 \text{ cm}}}$; $m = \underline{\underline{5\sqrt{3} \text{ cm}}}$; $2\varphi = \underline{\underline{60^\circ}}$.

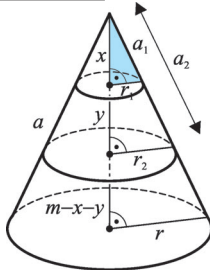
2039. $m = \underline{\underline{\sqrt{15} \cdot r}}$.

2040. $\varepsilon \approx \underline{\underline{145,36^\circ}}$; $t_p \approx \underline{\underline{412,36 \text{ cm}^2}}$.

2041. $t = \underline{\underline{12,5 \text{ cm}^2}}$.

2042. $m \approx \underline{\underline{33,55 \text{ cm}}}$.

2043. $m \approx \underline{\underline{2,04 \text{ m}}}$.

2045.

2044. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$. $t_p = ra\pi \Rightarrow r_1 \cdot a_1 \cdot \pi =$
 $= \frac{1}{2} \cdot ra\pi$, azaz $\lambda r \cdot \lambda a = \frac{1}{2} ra \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot m \Rightarrow m_1 =$
 $= \underline{\underline{23\sqrt{2} \text{ cm}}} (\approx 32,53 \text{ cm})$.

2045. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{x}{m} = \lambda_1$. $r_1 \cdot a_1 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot ra\pi$,
 azaz $\lambda_1 r \cdot \lambda_1 a = \frac{1}{3} ra \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot m \Rightarrow x = \underline{\underline{11\sqrt{3} \text{ cm}}}$

($\approx 19,05 \text{ cm}$). $\frac{r_2}{r} = \frac{a_2}{a} = \frac{x+y}{m} = \lambda_2$. $r_2 \cdot a_2 \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot ra\pi$, azaz $\lambda_2 r \cdot \lambda_2 a = \frac{2}{3} ra \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x+y = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot m \Rightarrow x+y = \underline{\underline{11\sqrt{6} \text{ cm}}} (\approx 26,94 \text{ cm})$.

2046. Tekintsük a 2044. ábrát. $\frac{t_1}{t_p - t_1} = \frac{a}{b} \Rightarrow t_1 = \frac{a}{a+b} \cdot t_p$. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2} =$
 $= \frac{m_1}{m} = \lambda$. $r_1 \cdot a_1 \cdot \pi = \frac{a}{a+b} \cdot r_2 \cdot a_2 \cdot \pi$, azaz $\lambda^2 \cdot r_2 \cdot a_2 = \frac{a}{a+b} \cdot r_2 a_2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{a}{a+b}} \Rightarrow m_1 = \lambda m =$
 $= \underline{\underline{\sqrt{\frac{a}{a+b}} \cdot m}}$.

2047. A 2044. ábrát vizsgáljuk. Legyen $a_i = a_i$; $r_i = r_i$; $m_i = m_i$. Hasonlóság miatt:

$\frac{r_i}{r} = \frac{a_i}{a} = \frac{m_i}{m} = \lambda_i$ ($i = 1; 2; \dots; n-1$). $r_i \cdot a_i \cdot \pi = \frac{i}{n} \cdot ra\pi$, azaz $\lambda_i r \cdot \lambda_i a = \frac{i}{n} ra \Rightarrow \lambda_i = \sqrt{\frac{i}{n}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow m_i = \lambda_i \cdot m \Rightarrow m_i = \underline{\underline{\sqrt{\frac{i}{n}} \cdot m}}$.

2048. a) $A \approx \underline{\underline{15,39 \text{ cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{0,637 \text{ cm}^3}}$; b) $A \approx \underline{\underline{76,94 \text{ dm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{36,88 \text{ dm}^3}}$;

c) $A \approx \underline{\underline{31855,7 \text{ cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{343062 \text{ cm}^3}}$; d) $A \approx \underline{\underline{365 \text{ cm}^2}}$ és $V \approx \underline{\underline{447 \text{ cm}^3}}$.

2049. $\frac{A_1}{A_2} = 4$ és $\frac{V_1}{V_2} = 8$.

2050. $A \approx \underline{10\,310,3\text{ cm}^2}$ és $V \approx \underline{67\,871,3\text{ cm}^3}$.

2051. $A \approx \underline{1,54\text{ m}^2}$ és $V \approx \underline{0,36\text{ m}^3}$.

2052. $a \approx \underline{0,652\text{ m}}$.

2053. $a \approx \underline{1,64\text{ m}}$.

2054. $m^2 = a^2 - r^2 = 8r^2 \Rightarrow m = 2\sqrt{2} \cdot r$ $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot r = \frac{2\sqrt{2}}{3} r^3 \pi \Rightarrow r = 4,37\text{ cm}$.

$A = r \cdot 4r \cdot \pi = 4r^2 \pi \Rightarrow A \approx \underline{240\text{ cm}^2}$.

2055. A tengelymetszet területe: $m \cdot r = 1,56\text{ m}^2$; $a^2 = m^2 + r^2 \Rightarrow a^2 + 2mr = (m+r)^2$ és $a^2 - 2mr = (m-r)^2 \Rightarrow$ **1. eset:** $m+r = 2,744$ és $m-r = 1,136 \Rightarrow m = 1,94$ és $r = 0,804 \Rightarrow V \approx \underline{1,31\text{ m}^3}$. **2. eset:** $m+r = 2,744$ és $m-r = -1,136 \Rightarrow m = 0,804$ és $r = 1,94 \Rightarrow V \approx \underline{3,17\text{ m}^3}$.

2056. $V \approx \underline{449,3\text{ cm}^3}$.

2057. $A \approx \underline{23\,360,1\text{ cm}^2}$ és $V \approx \underline{237\,203\text{ cm}^3}$.

2058. $A = \frac{3a^2 \pi}{4}$ és $V = \frac{\sqrt{3}a^3 \pi}{24}$.

2059. Tekintsük a 2027. ábrát. $\varepsilon = 240^\circ$. $\frac{2}{3} \cdot 2a\pi = 2r\pi \Rightarrow r = \frac{2}{3} a = 8\text{ cm} \Rightarrow m = 4\sqrt{5}\text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{256\sqrt{5} \cdot \pi}{3} \approx \underline{599,4\text{ cm}^3}$.

2060. $V \approx \underline{391,8\text{ cm}^3}$.

2061. $A \approx \underline{1973,1\text{ cm}^2}$ és $V \approx \underline{5723,34\text{ cm}^3}$.

2062. $V \approx \underline{3,56\text{ m}^3}$.

2063. $A \approx \underline{15,46\text{ m}^2}$.

2064. Tekintsük a 2044. ábrát. Hasonlóság miatt: $\frac{V_1}{V} = \lambda^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, valamint

$\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda \Rightarrow r_1 = \lambda r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot 12,7 \approx \underline{10,08\text{ cm}}$ és $m_1 = \lambda m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot 42,6 \approx \underline{33,81\text{ cm}}$.

2065. Tekintsük a 2044. ábrát. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$. Mivel

$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow m_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot m$.

2066. A 2044. ábra jelöléseit használva a hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a} = \frac{m_1}{m} = \lambda$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$.

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi m \approx 26\,575,59\text{ dm}^3$ és $V - V_1 = 7972,8\text{ dm}^3 \Rightarrow V_1 \approx 18\,602,8\text{ dm}^3 \Rightarrow \lambda \approx 0,88 \Rightarrow m_1 = \lambda m \approx \underline{47,41\text{ dm}}$.



2067. Tekintsük a 2027. ábrát. $a = \text{állandó}$; $r = a \cdot \sin \varphi$; $m = a \cdot \cos \varphi$. Alkalmazzuk

$$\begin{aligned} \text{az } abc &\leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \text{ középértékekre vonatkozó egyenlőtlenséget! } V = \frac{1}{3} r^2 \pi m = \\ &= \frac{\pi}{3} a^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot a \cdot \cos \varphi = \frac{\pi}{3} a^3 (1 - \cos^2 \varphi) \cdot \cos \varphi \Rightarrow V^2 = \frac{a^6 \pi^2}{9} \cdot (1 - \cos^2 \varphi) \cdot (1 - \cos^2 \varphi) \cdot \cos^2 \varphi = \\ &= \frac{a^6 \pi^2}{18} \cdot (1 - \cos^2 \varphi)(1 - \cos^2 \varphi) \cdot 2 \cos^2 \varphi \leq \frac{a^6 \pi^2}{18} \cdot \left(\frac{1 - \cos^2 \varphi + 1 - \cos^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi}{3} \right)^3 = \\ &= \frac{a^6 \pi^2}{18} \cdot \frac{8}{27} = \frac{4\pi^2 a^6}{243}. \text{ Egyenlőség akkor áll fenn, ha } 1 - \cos^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi, \text{ azaz } |\cos \varphi| = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Mivel φ a kúp nyílásszögének fele, ezért koszinusza nem lehet negatív, vagyis $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx 54,74^\circ \Rightarrow A 2\varphi \approx 109,47^\circ$ nyílásszögű kúp térfogata maximális az egyenlő alkotójú kúpok

$$\text{közül. Ekkor } V_{\max} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^6}{243}} = \frac{2a^3 \pi \sqrt{3}}{27}.$$

2068. A 2027. ábra jelöléseivel: $m^2 = a^2 - r^2$; $A = r(r+a)\pi \Rightarrow a = \frac{A}{r\pi} - r$. $V = \frac{1}{3} r^2 \pi m =$

$$= \frac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{r\pi} - r \right)^2 - r^2} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot \frac{1}{r\pi} \cdot \sqrt{A^2 - 2Ar^2 \pi} = \frac{r}{3} \cdot \sqrt{A^2 - 2Ar^2 \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{r^2}{9} \cdot (A^2 - 2Ar^2 \pi) \Rightarrow 9V^2 = r^2 A^2 - 2Ar^4 \pi = -2A\pi \cdot \left(r^4 - \frac{r^2 A}{2\pi} \right) =$$

$$= -2A\pi \cdot \left[\left(r^2 - \frac{A}{4\pi} \right)^2 - \frac{A^2}{16\pi^2} \right]. \text{ A másodfokú kifejezést a geometriai adatokkal összevetve}$$

$$\text{akkor van maximum, amikor } r^2 = \frac{A}{4\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}. \text{ Ekkor } a = \frac{A}{r\pi} - r = \frac{A}{\frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} \cdot \pi} - \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{A\pi}} - \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} = \frac{4\sqrt{A\pi} - \sqrt{A\pi}}{2\pi} = \frac{3\sqrt{A\pi}}{2\pi} = 3r, \text{ vagyis akkor maximális a térfogat, ha az}$$

alkotó az alapkör sugarának háromszorosa.

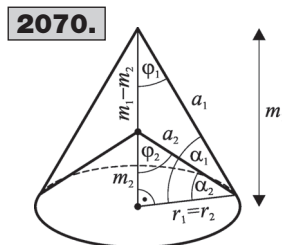
2069. A 2068. feladatban láttuk, hogy az A felszínű kúpok közül annak maximális a térfogata,

$$\text{amelyre } r = \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi} \text{ és } a = 3r. \Rightarrow m = \sqrt{a^2 - r^2} = 2r \cdot \sqrt{2}. V_{\max} = \frac{1}{3} r^2 \pi m = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2r \cdot \sqrt{2} =$$

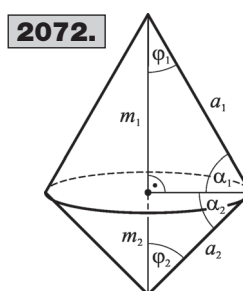
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} r^3 \pi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\frac{A^3}{64\pi^3}} \cdot \pi = \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}}. V \leq V_{\max} \Rightarrow V \leq \sqrt{\frac{A^3}{72\pi}} \Rightarrow 72\pi V^2 \leq A^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{72\pi V^2} \leq A \Rightarrow A_{\min} = \sqrt[3]{72\pi V^2}, \text{ azaz a minimális felszínhez tartozó térfogat pont } V_{\max}, \text{ tehát } \underline{\underline{a = 3r.}}$$

2070. $a = \frac{r}{\cos \alpha}$ és $m = r \cdot \operatorname{tg} \alpha$. $A = t_{p_1} + t_{p_2} = r_1 a_1 \pi + r_2 a_2 \pi =$
 $= r\pi(a_1 + a_2) = r\pi \cdot \left(\frac{r}{\cos \alpha_1} + \frac{r}{\cos \alpha_2} \right) = r^2 \pi \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha_1} + \frac{1}{\cos \alpha_2} \right) \approx$
 $\approx 492,7 \text{ cm}^2$. $V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} r_1^2 \pi m_1 - \frac{1}{3} r_2^2 \pi m_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi (m_1 - m_2) =$
 $= \frac{1}{3} r^2 \pi (r \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - r \cdot \operatorname{tg} \alpha_2) = \frac{1}{3} r^3 \pi (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \approx 600 \text{ cm}^3$.



2071. Mivel a kúpok szimmetriatengelye közös, a térfogat nem függ a kisebb kúp nagyobb kúpon belüli helyzetétől. Hasonlóság miatt: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_2 = 14,4 \text{ cm}$. $V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} r_1^2 \pi m_1 -$
 $-\frac{1}{3} r_2^2 \pi m_2 = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 m_1 - r_2^2 m_2) \approx 919,8 \text{ cm}^3$.



2072. $\varphi_2 = 45^\circ \Rightarrow m_2 = r$ és $\varphi_1 = 30^\circ \Rightarrow m_1 = r \cdot \sqrt{3}$.

1. eset: A 2070. ábrának megfelelően $3,2 = m_1 - m_2 = r(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow r \approx 4,37 \text{ dm}$. $V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi m_1 - \frac{1}{3} r^2 \pi m_2 =$

$= \frac{1}{3} r^2 \pi (m_1 - m_2) \approx 64,03 \text{ dm}^3$.

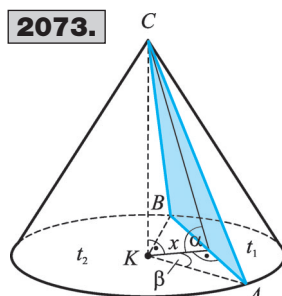
2. eset: $3,2 = m_1 + m_2 = r(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow r \approx 1,17 \text{ dm}$. $V = V_1 + V_2 =$

$= \frac{1}{3} r^2 \pi (m_1 + m_2) \approx 4,59 \text{ dm}^3$.

2073. $t_{\text{alap}} = r^2 \pi \approx 201,06 \text{ cm}^2$. $\frac{m}{x} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow x = \frac{m}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 2,98 \text{ cm}$.

$\frac{x}{r} = \cos \beta \Rightarrow \beta \approx 68,16^\circ \Rightarrow t_1 = r^2 \pi \cdot \frac{2\beta}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\beta \approx 54 \text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_2 = t - t_1 \approx 147,06 \text{ cm}^2$. $V_1 = \frac{1}{3} t_1 m \approx 252 \text{ cm}^3$ és $V_2 = \frac{1}{3} t_2 m \approx 686,28 \text{ cm}^3$.



2074. $t_{ABC\Delta} = \sqrt{s(s-2r)(s-a_1)(s-a_2)} = \frac{1}{2} \cdot 2rm = rm$, ahol $s = \frac{2r + a_1 + a_2}{2} \Rightarrow m \approx 25,97 \text{ cm}$;

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi m \approx 2719,3 \text{ cm}^3$.

2075. A 2032. ábrának megfelelően, az alapkör sugarát r -rel jelölve: $\alpha = 45^\circ$; $a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 = 8 - a_1$; $t_{ABC\Delta} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$. $t_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} a_1 a_2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a_1 (8 - a_1) \cdot \sin \alpha \Rightarrow a_1 = 3 \text{ dm}$ és $a_2 =$

$= 5 \text{ dm}$. Koszinusztétel $ABC\Delta$ -re: $(2r)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow r^2 = 3,20 \Rightarrow r \approx 1,79 \text{ dm}$. $t_{ABC\Delta} =$

$= rm \Rightarrow m \approx 2,96 \text{ dm}$; $V = \frac{1}{3} r^2 \pi m \approx 9,92 \text{ dm}^3$.

2076. A 2032. ábra szerint (az alapkör sugarát r -rel jelölve): $a_1 = 32 \text{ cm}$; $a_2 = 58 \text{ cm}$;

$\varepsilon = CBA \sphericalangle = 65^\circ 15'$. $m = a_1 \cdot \sin \varepsilon \approx 29,06 \text{ cm}$. Koszinusztétel $ABC\Delta$ -re: $a_2^2 = a_1^2 + (2r)^2 -$

$- 2a_1 2r \cdot \cos \varepsilon \Rightarrow r \approx 31,79 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{1}{3} r^2 \pi m \approx 30754,3 \text{ cm}^3$.

II

2077. Tekintsük a 2027. ábrát. $t_p = k \cdot t_a$, azaz $ra\pi = k \cdot r^2\pi \Rightarrow a = kr$. $\frac{\varepsilon}{360^\circ} = \frac{2r\pi}{2a\pi} = \frac{r}{a} = \frac{1}{k} \Rightarrow \varepsilon = \frac{360^\circ}{k}$.

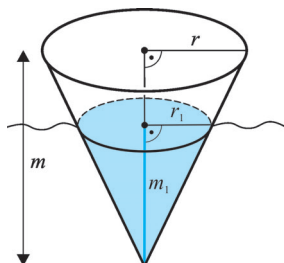
2078. A 2027. ábra jelöléseivel: $\varepsilon = 36^\circ$. $\frac{\varepsilon}{360^\circ} = \frac{t}{a^2\pi} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{10t}{\pi}} \Rightarrow t = a\pi = \sqrt{\frac{10t}{\pi}} \cdot \pi \Rightarrow r = \frac{t}{\sqrt{10t\pi}}$. $m^2 = a^2 - r^2 = \frac{10t}{\pi} - \frac{t^2}{10t\pi} = \frac{99t}{10\pi} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{99t}{10\pi}}$. $V = \frac{1}{3} r^2 \pi m = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{10t\pi} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{99t}{10\pi}} = \frac{t \sqrt{11t}}{10 \sqrt{10\pi}}$.

2079. A homokkúp 5,76 m széles és 1,73 m magas.

2080. A 2044. ábra jelöléseivel: $2r_1\pi = 25,12 \Rightarrow r_1 \approx 4\text{ m} = 40\text{ dm}$; $m_1^2 = a_1^2 - r_1^2 \Rightarrow m_1 \approx 30\text{ dm}$.

A kiálló rész és az egész tömb hasonló. A hasonlóság aránya $\lambda = \frac{m_1}{m} = \frac{r_1}{r} = \frac{a_1}{a}$ és $\frac{V_1}{V} = \lambda^3$.

$(V - V_1) \cdot \rho_{\text{víz}} = V \cdot \rho_{\text{jég}}$. Ezért $(V - \lambda^3 V) \cdot \rho_{\text{víz}} = V \cdot \rho_{\text{jég}} \Rightarrow 1 - \lambda^3 = 0,9 \Rightarrow \lambda^3 = 0,1$. $V = \frac{V_1}{\lambda^3} =$

2081.

$$= \frac{1}{3} r_1^2 \pi m_1 = \frac{1600\pi \cdot 30}{\lambda^3} = \frac{1600\pi \cdot 30}{3 \cdot 0,1} = 160\,000\pi. \text{ A jégtömb tömege: } V \cdot \rho_{\text{jég}} = 160\,000\pi \cdot 0,9 \approx \underline{\underline{452\,389\text{ kg}}}.$$

2081. Hasonlóság miatt: $\frac{r_1}{r} = \frac{m_1}{m} \Rightarrow r_1 = \frac{m_1}{m} \cdot r$. $\frac{1}{3} r^2 \pi m \rho = \frac{1}{3} r_1^2 \pi m_1 \rho_{\text{víz}} \Rightarrow r^2 \cdot 0,25 \cdot 0,73 = r_1^2 \cdot m_1 \cdot 1 \Rightarrow r^2 \cdot 0,1825 = \frac{m_1^2}{m^2} \cdot r^2 \cdot m_1 \Rightarrow m_1^3 = 0,1825 m^2 \Rightarrow m_1 \approx 0,225\text{ dm}$. 2,25 cm-re merül a víz alá.

Csonkakúp

2082. $a \approx \underline{\underline{11,9\text{ cm}}}$ és $\alpha \approx \underline{\underline{40,9^\circ}}$.

2083. $m \approx \underline{\underline{0,67\text{ cm}}}$ és $\alpha \approx \underline{\underline{16,96^\circ}}$.

2084. $r \approx \underline{\underline{11,91\text{ cm}}}$ és $\alpha \approx \underline{\underline{44,5^\circ}}$.

2085. $m = \underline{\underline{20,7\text{ m}}}$ és $a \approx \underline{\underline{29,27\text{ m}}}$.

2086. a) $A = \underline{\underline{2027,08\text{ cm}^2}}$; b) $A \approx 127\,372\text{ mm}^2 \approx \underline{\underline{1273,7\text{ cm}^2}}$.

2087. $t_p \approx \underline{\underline{2803,9\text{ cm}^2}}$.

2088. $628,17 = [(r+6)^2 + r^2 + (2r+6) \cdot 12,6] \cdot \pi \Rightarrow r = \underline{\underline{2,125\text{ cm}}}$ és $R = \underline{\underline{8,125\text{ cm}}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{2089.} \quad t_p &= 4r \cdot a \cdot \pi; \quad \frac{R-r}{a} = \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{R-r}{\cos \alpha} = \frac{2r}{\cos \alpha} \Rightarrow \\ t_p &= 4r \cdot \frac{2r}{\cos \alpha} \cdot \pi = \frac{8r^2 \pi}{\cos \alpha} \Rightarrow r^2 = \frac{t_p \cdot \cos \alpha}{8\pi} \Rightarrow r^2 \approx 20,3 \text{ cm}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \approx \underline{\underline{4,505 \text{ cm}}} \Rightarrow R \approx \underline{\underline{13,515 \text{ cm}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2090.} \quad R^2 \pi &= 25 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \text{ és } r^2 \pi = 17 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{\pi}}. \quad t_p = (R+r) \cdot a \cdot \pi = \\ &= \frac{\sqrt{17} + 5}{\sqrt{\pi}} \cdot 12 \cdot \pi = (\sqrt{17} + 5) \cdot 12 \sqrt{\pi} \approx \underline{\underline{194 \text{ cm}^2}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2091.} \quad m \approx \underline{\underline{4,96 \text{ cm}}}.$$

$$\mathbf{2092.} \quad m \approx \underline{\underline{1,33 \text{ dm}}}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2093.} \quad t_{p_1} &= t_{p_2} = 0,5 t_p, \text{ azaz } (r + \varrho) \cdot a_1 \cdot \pi = (\varrho + R) \cdot a_2 \cdot \pi = 0,5 \cdot (r + R) \cdot a \cdot \pi \Rightarrow (r + \varrho) \cdot a_1 = \\ &= 0,5 \cdot (r + R) \cdot a, \text{ valamint } (\varrho + R) \cdot (a - a_1) = 0,5 \cdot (r + R) \cdot a \Rightarrow a_1 \approx \underline{\underline{10,47 \text{ cm}}} \text{ és } \varrho \approx \underline{\underline{14,3 \text{ cm}}}. \\ m_1^2 &= a_1^2 - (\varrho - r)^2 \Rightarrow m_1 \approx \underline{\underline{10,14 \text{ cm}}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2094.} \quad a) V \approx \underline{\underline{439,7 \text{ cm}^3}}; \quad b) V \approx \underline{\underline{0,019 \text{ cm}^3}}; \quad c) V \approx \underline{\underline{4460,5 \text{ cm}^3}}; \quad d) V \approx \underline{\underline{113,89 \text{ cm}^3}}.$$

$$\mathbf{2095.} \quad \text{A vízyűjtőbe körülbelül } \underline{\underline{490,61}} \text{ víz fér.}$$

$$\mathbf{2096.} \quad V \approx \underline{\underline{2075,5 \text{ cm}^3}}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2097.} \quad 2R\pi &= 50 \Rightarrow R \approx 7,96 \text{ és } 2r\pi = 30 \Rightarrow r \approx 4,77. \quad V = \frac{1}{3} (R^2 + r^2 + Rr) \cdot m \cdot \pi \Rightarrow m \approx 2,67 \\ \text{és } \frac{m}{R-r} &= \text{tg } \alpha \Rightarrow \alpha \approx \underline{\underline{39,9^\circ}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2098.} \quad 2021,6 = \frac{1}{3} \cdot (5,7^2 + r^2 + 5,7r) \cdot 32,5\pi \Rightarrow r^2 + 5,7r - 26,91 = 0. \quad r = \underline{\underline{3,05 \text{ dm}}}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2099.} \quad V_k &= 0,5V_h, \quad \text{azaz } \frac{1}{3} \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \cdot m \cdot \pi = 0,5 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot m \Rightarrow R^2 - 2Rr - 2r^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_1 = r \cdot (1 - \sqrt{3}) < 0, \text{ ez nem lehet. } R_2 = r \cdot (1 + \sqrt{3}) \Rightarrow \frac{R}{r} = \underline{\underline{1 + \sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2100.} \quad \text{Maximális teher: } t = 36 \cdot V \cdot \varrho_{\text{víz}} - 36 \cdot V \cdot \varrho = 36 \cdot V \cdot (\varrho_{\text{víz}} - \varrho), \text{ ahol}$$

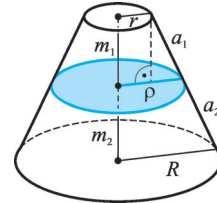
$$V = \frac{1}{3} (1,4^2 + 1^2 + 1,4 \cdot 1) \cdot 120 \cdot \pi \approx 547,9 \text{ dm}^3 \Rightarrow t = 36 \cdot 547,9 \cdot (1 - 0,6) \approx \underline{\underline{7889,76 \text{ kg}}}.$$

$$\mathbf{2101.} \quad \text{A folyadék tömege } \underline{\underline{35,26 \text{ kg}}}.$$

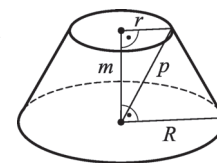
$$\mathbf{2102.} \quad p = 2r \Rightarrow m = \sqrt{3}r; \quad r^2 \pi = 3 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{\pi}}; \quad R^2 \pi = 12 \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \left(12 + 3 + 2\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}} \pi \right) \sqrt{3} \sqrt{\frac{3}{\pi}} = (15 + 6) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{21}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V \approx \underline{\underline{11,85 \text{ m}^3}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2103.} \quad 5V \approx \underline{\underline{157,16 \text{ m}^3}}.$$

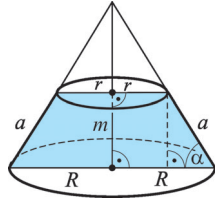
2093.

||

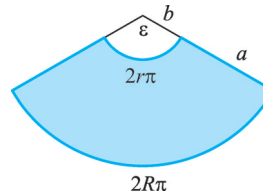
2102.



2104.



2109.



2104. $a = 2r$; $k_{\text{trapez}} = 2r + 2a + 2R = 6r + 2R = 15 \Rightarrow R = 7,5 - 3r$. $a^2 = m^2 + (R - r)^2$, azaz $4r^2 = 9 + (R - r)^2 \Rightarrow 4r^2 = 9 + (7,5 - 4r)^2 \Rightarrow 0 = r^2 - 5r + 5,4375 \Rightarrow r_1 = 3,4 \Rightarrow R = -2,7$ (ez nem lehet). $r_2 = 1,6 \Rightarrow R = 2,7$. $A \approx \underline{74,14 \text{ m}^2}$ és $V \approx \underline{44,52 \text{ m}^3}$.

2105. A testet a fejtetőre állított 2104. ábrán szemléltetjük. $V \approx 35\,137,7 \text{ cm}^3 \approx 35,14 \text{ dm}^3$; $a^2 = m^2 + (R - r)^2 \Rightarrow a \approx 38,8 \text{ cm}$. A vödör teteje nyitott, ezért $A = (r^2 + (R + r)a) \cdot \pi \Rightarrow A \approx 4675,3 \text{ cm}^2$. A hulladékot is számítva: $A' = 1,06 \cdot A \approx 4955,8 \text{ cm}^2 \approx 50 \text{ dm}^2$. A vödör elkészítéséhez $\underline{50 \text{ dm}^2}$ bádóg kell és kb. $\underline{351}$ víz fér bele.

2106. Tekintsük a 2104. ábrát. $\frac{R-r}{a} = \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{R-r}{\cos \alpha} \approx 65 \text{ cm}$; $m = a \cdot \sin \alpha \approx 56 \text{ cm}$. $128,64 \text{ dm}^2 = 12\,864 \text{ cm}^2 = (r+R)a\pi \Rightarrow r+R = 63 \text{ cm}$ és $R-r = 33 \text{ cm} \Rightarrow R = 48 \text{ cm}$ és $r = 15 \text{ cm}$. $\Rightarrow V \approx \underline{190\,531 \text{ cm}^3}$.

2107. (1) $(R^2 + r^2 + (R+r)a) \cdot \pi = 527,5 \text{ dm}^2$; (2) $(r+R)a\pi = 314,2 \text{ dm}^2$; (3) $a = 10,3 \text{ dm}$; (1) és (2) egyenletekből: $R^2 + r^2 \approx 67,9$; valamint (2) és (3) egyenletekből: $R+r \approx 9,71 \Rightarrow r \approx 1,6325 \text{ dm}$ és $R \approx 8,0775 \text{ dm}$. $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 8,03 \text{ dm}$. $\Rightarrow V \approx \underline{682 \text{ dm}^3}$.

2108. $a^2 = m^2 + (R-r)^2 \Rightarrow R-r \approx 7,38$, valamint $t_p = (R+r)a\pi \Rightarrow R+r \approx 16,5$. $R \approx 11,94 \text{ dm}$ és $r \approx 4,56 \text{ dm} \Rightarrow V \approx \underline{1436,93 \text{ dm}^3}$.

2109. $\varepsilon = 120^\circ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 2b \cdot \pi = 2r\pi \Rightarrow r = \frac{1}{3}b \approx 0,83 \text{ cm}$ és $\frac{1}{3} \cdot 2(b+a)\pi = 2R\pi \Rightarrow R = \frac{1}{3}(a+b) = 2 \text{ cm}$; $a = 6 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}$; $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 3,3 \text{ cm} \Rightarrow A \approx \underline{45,85 \text{ cm}^2}$ és $V \approx \underline{2,94 \text{ cm}^3}$.

2110. A 2109. és a 2104. ábra jelöléseit használva: $b = a \cdot \frac{\varepsilon}{360^\circ} = \frac{2r\pi}{2a\pi} = \frac{2R\pi}{4a\pi} \Rightarrow R = 2r$ és $a = r \cdot \frac{360^\circ}{\varepsilon}$. $t_p = (R+r) \cdot a \cdot \pi = 3r \cdot r \cdot \frac{360^\circ}{\varepsilon} \cdot \pi \Rightarrow r \approx 2,68 \text{ cm} \Rightarrow R \approx 5,36 \text{ cm}$ és $a \approx 8 \text{ cm}$; $m^2 = a^2 - (R-r)^2 \Rightarrow m \approx 7,54 \text{ cm} \Rightarrow V \approx \underline{396,98 \text{ cm}^3}$.

2111. Tekintsük a 2093. ábrát. $R = 8,6 \text{ m}$, $r = 5,8 \text{ m}$, $m_1 + m_2 = 7 \text{ m}$, $m_2 = 2 \text{ m}$. $(a_1 + a_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 + (R-r)^2 \Rightarrow a_1 + a_2 \approx 7,54 \text{ m}$. Párhuzamos szelők tétele miatt $a_1 : a_2 = m_1 : m_2 \Rightarrow a_1 \approx 5,39 \text{ m}$ és $a_2 \approx 2,15 \text{ m}$. $a_1^2 = m_1^2 + (\varrho - r)^2 \Rightarrow \varrho \approx 7,81 \text{ m}$. $V_1 = \frac{1}{3}(r^2 + \varrho^2 + r \cdot \varrho) \cdot m_1 \cdot \pi$ és $V_2 = \frac{1}{3}(\varrho^2 + R^2 + \varrho \cdot R) \cdot m_2 \cdot \pi \Rightarrow V_1 \approx \underline{732,7 \text{ m}^3}$ és $V_2 \approx \underline{423,3 \text{ m}^3}$.

2112. Tekintsük a csonkakúp kiegészítő kúpját! A háromszögek hasonlósága miatt: $\frac{m}{m_1 + m_2 + m} = \frac{r}{R}$, azaz $\frac{m}{m + 14} = \frac{6}{8} \Rightarrow m = 42$ dm a kiegészítő kúp magassága. A kúpok hasonlósága miatt:

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^3 = \frac{V}{V + V_1}, \text{ ahol } V = \frac{1}{3} r^2 \pi m \approx 1583,36 \text{ dm}^3 \text{ és}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (r^2 + R^2 + r \cdot R) \cdot (m_1 + m_2) \cdot \pi \approx 1084,9 \text{ dm}^3 \Rightarrow \rho = 1,19 r_1 \approx \approx 7,14 \text{ dm}$$

a metsztekör sugara. A háromszögek hasonlósága miatt:

$$\frac{m + m_1}{m} = \frac{\rho}{r} \Rightarrow m_1 \approx 7,98 \text{ dm, tehát a fedőkör síkjától mérve } \underline{7,98 \text{ dm}}$$

ni a csonkakúpot.

2113. Tekintsük a 2104. ábrát. Legyen $M - m = m_0 \Rightarrow M = 10$ m, $R = 5$ m. $V_{\text{kúp}} = \frac{1}{3} R^2 \pi M \approx \approx 261,8 \text{ m}^3$ és $V_{\text{csonkakúp}} = 20 \text{ m}^3 \Rightarrow V_{\text{kis kúp}} = V_{\text{kúp}} - V_{\text{csonkakúp}} \approx 241,8 \text{ m}^3$. $V_{\text{kis kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi m_0$, valamint hasonlóság miatt $\frac{m_0}{r} = \frac{M}{R} = 2 \Rightarrow m_0 = 2r \Rightarrow V_{\text{kis kúp}} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2r = \frac{2}{3} r^3 \pi \Rightarrow r \approx 4,87 \text{ m} \Rightarrow \Rightarrow m = M - m_0 = 2R - 2r \Rightarrow m \approx \underline{0,26 \text{ méter}}$ távolságban kell a kúpot metszeni.

2114. Tekintsük a 2112. ábrát. $m_1 + m_2 = 4$ dm, $R = 5$ dm, $r = 3$ dm, ρ a vízfelszínnel egy szinten levő kör sugara. $V_i \cdot \rho_i = V'_i \cdot \rho_f \Rightarrow V'_i = V_i \cdot \frac{\rho_i}{\rho_f} = (9 + 25 + 15) \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot 0,6 \approx 123,15 \text{ dm}^3$. $\frac{m}{m + 4} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5m = 3m + 12 \Rightarrow m = 6$ dm. $V_{\text{kis kúp}} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 6 = 18\pi \approx 56,54 \text{ dm}^3$ és $V_i - V'_i = = 82,1 \text{ dm}^3 \Rightarrow V_{\text{kis kúp}} + V_i - V'_i = 138,64 \text{ dm}^3$. Hasonlóság miatt: $6:3 = (6 + 4 - m_2):\rho \Rightarrow 6\rho = = 3(10 - m_2) \Rightarrow 10 - 2\rho = m_2$. $138,64 = \frac{1}{3} \rho^2 \pi \cdot (6 + 4 - m_2) = \frac{1}{3} \rho^2 \pi \cdot 2\rho = \frac{2}{3} \rho^3 \pi \Rightarrow \rho \approx \approx 4,04 \Rightarrow m_2 = \underline{1,92 \text{ dm}}$.

2115. Tekintsük a csonkakúpot a kiegészítő kúpjával együtt. Az egyesített kúpot metsző síkok a kiegészítő kúppal hasonló kúpokat vágnak le. Bármely két hasonló kúp térfogatának aránya egyenlő a hasonlósági arány köbével. A kúpok térfogata a csúcstól lefelé haladva rendre: $V_1; V_2;$

$$V_3; V_4. \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{b}{1}\right)^3, \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{c}{1}\right)^3, \frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{2}{1}\right)^3. \text{ A feladat feltétele szerint}$$

$$\text{a csonkakúpok térfogataránya: } (V_2 - V_1):(V_4 - V_1) = 2:(2 + 3 + 7) =$$

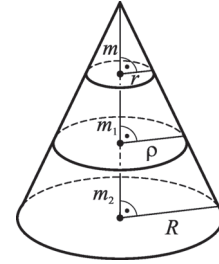
$$= 1:6 \Rightarrow (V_1 \cdot b^3 - V_1):(V_1 \cdot 2^3 - V_1) = (b^3 - 1):(2^3 - 1) = 1:6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^3 = \frac{13}{6} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{13}{6}}. (V_3 - V_1):(V_4 - V_1) = (2 + 3):(2 + 3 + 7) =$$

$$= 5:12 \Rightarrow (V_1 \cdot c^3 - V_1):(V_1 \cdot 2^3 - V_1) = (c^3 - 1):(2^3 - 1) = 5:12 \Rightarrow$$

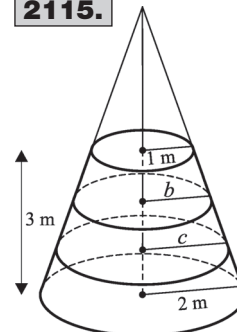
$$\Rightarrow c^3 = \frac{47}{12} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{47}{12}}.$$

2112.



II

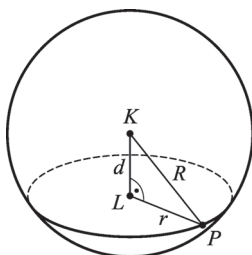
2115.



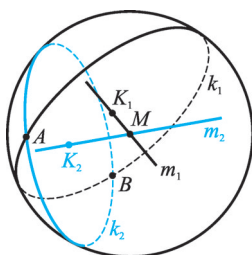
Gömb

II

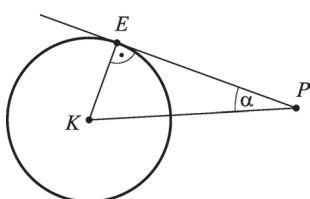
2116.



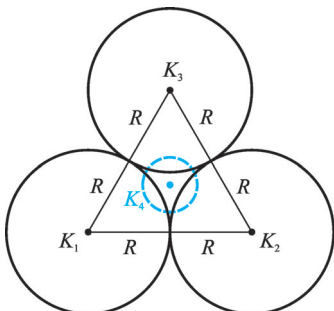
2117.



2121.



2122/I.



2116. *KLP* derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $R^2 = d^2 + r^2$.

2117. $k_1 \cap k_2 = \{A; B\}$. k_1 összes pontjától egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k_1 kör K_1 középpontjában k_1 síkjára állított merőleges egyenes: m_1 . k_2 összes pontjától egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k_2 kör K_2 középpontjában k_2 síkjára állított merőleges egyenes: m_2 . A fentiekből következik, hogy m_1 és m_2 is benne van az AB szakasz felezőmerőleges síkjában és m_1 nem párhuzamos m_2 -vel. $\Rightarrow m_1$ metszi m_2 -t és $m_1 \cap m_2 = M$. Az M középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

2118. Használjuk a 2117. ábra jelöléseit. k_1 és k_2 kör síkja párhuzamos. K_1 -et és K_2 -t összekötő m egyenes merőleges a k_1 és k_2 körök síkjaira, ezért m minden pontja egyforma messze van k_1 pontjaitól, valamint k_2 pontjaitól, így m -en lesz a keresett gömb középpontja. Tekintsük k_1 és k_2 körök $r_1 \parallel r_2$ sugarát! Ezek metszéspontja k_1 -gyel, illetve k_2 -vel A , illetve B . A -tól és B -tól egyforma távolságra lévő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőleges síkja: S . S és m helyzetéből következik, hogy m döfi S -et. Legyen $m \cap S = M$. Az M középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

2119. Használjuk a 2117. ábra jelöléseit. k_1 és k_2 körnek egy közös pontja van. Legyen $k_1 \cap k_2 = A$. k_1 kör K_1 középpontjában k_1 síkjára állított merőleges m_1 ; k_2 kör K_2 középpontjában k_2 síkjára állított merőleges m_2 . $e \perp AK_1$ és $e \perp m_1 \Rightarrow e \perp [m_1; A]$, valamint $e \perp AK_2$ és $e \perp m_2 \Rightarrow e \perp [m_2; A]$. Mivel e -re A -ban csak egy merőleges sík állítható, m_1 és m_2 egy síkban van. m_1 és m_2 nem párhuzamos, ezért metszik egymást, $m_1 \cap m_2 = M$. M egyforma távolságra van k_1 pontjaitól és k_2 pontjaitól. $\Rightarrow M$ középpontú, MA sugarú gömb az egyetlen, aminek k_1 és k_2 is síkmetszete.

2120. A k kör pontjaitól egyforma távolságra lévő pontok halmaza a k körre a K középpontban állított merőleges: m . Legyen $A \in k$. A -tól és P -tól egyforma távolságra lévő pontok halmaza az AP szakasz felezőmerőleges síkja: S . P nincs rajta k_1 síkján $\Rightarrow m$ nem párhuzamos S -sel $\Rightarrow m$ döfi S -et, $m \cap S = M$. Az M középpontú, MP sugarú gömb az egyetlen, aminek síkmetszete k és áthalad P -n.

2121. P -ből húzott érintő érintési pontja: E . $PE \perp EK$, ezért felírható Pitagorasz tétele a $PEK\Delta$ -re: $PK^2 = PE^2 + EK^2 \Rightarrow$

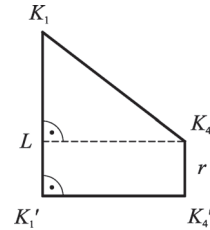
$$\Rightarrow PE^2 = PK^2 - KE^2 = \text{állandó} \Rightarrow PE \text{ állandó és } \sin \alpha = \frac{KE}{KP}$$

szintén állandó $\Rightarrow \alpha$ is állandó $\Rightarrow PE$ alkotója a PK tengelyű, 2α nyílásszögű forgáskúpnak.

2122. Az R sugarú gömbök középpontjainak merőleges vetületei a közös érintősíkra $2R$ oldalú szabályos háromszöget határoznak meg. E háromszög középpontja a negyedik gömb

középpontjának vetülete, ezért $K_1'K_4' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} R$. Készítsünk az S -re merőleges síkmetszetet K_1 -en és K_4 -en át! $K_1K_1' = R$; $K_4K_4' = r$, a negyedik gömb sugara; $K_1L = K_1K_1' - K_4K_4' = R - r$; $LK_4 = K_1'K_4'$; $K_1K_4 = R + r$. Pitagorasz tétele a $K_1LK_4\Delta$ -re: $K_1K_4^2 = K_1L^2 + LK_4^2$, azaz $(R + r)^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} R\right)^2 \Rightarrow R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{4}{3} R^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3} R$.

2122/II.



2123. A tetraéder egy csúcsból induló a ; b ; c élei páronként merőlegesek egymásra, ezért a tetraéder beilleszthető egy téglatestbe. A téglatest középpontos szimmetriája miatt a tetraéder köré írható gömb megegyezik a téglatest köré írható gömbbel, aminek átmérője a téglatest testátlója. $\Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2124. a) $r = \underline{2,99 \text{ cm}}$; b) $r = \underline{44 \text{ m}}$.

2125. A keresett terület: $t = \underline{\frac{3}{4} R^2 \pi}$.

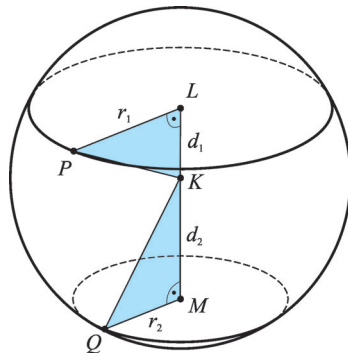
2126. A keresett távolság: $KL = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2} R}$.

2127. A gömb főkörének területe kétszerese a metszet területének. A 2116. ábra jelöléseit használva: $KP^2 \cdot \pi = 2LP^2 \cdot \pi \Rightarrow KP^2 = 2LP^2$. Pitagorasz tétele a KLP derékszögű háromszögre: $KP^2 = KL^2 + LP^2 \Rightarrow KL^2 = KP^2 - LP^2 = KP^2 - 0,5 KP^2 = 0,5 KP^2$. A keresett távolság:

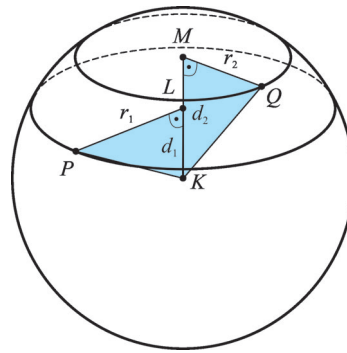
$$KL = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} R}.$$

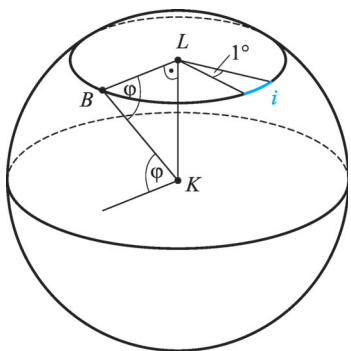
2128. Pitagorasz tétele a PLK , illetve a QMK derékszögű háromszögekre: $KP^2 = KL^2 + LP^2$ és $KQ^2 = KM^2 + MQ^2$, azaz $r^2 = 36x^2 + 49$ és $r^2 = 25x^2 + 225 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow r = \underline{25 \text{ cm}}$. A megoldás független attól, hogy K elválasztja-e az M és L pontokat, vagy sem.

2128/I.



2128/II.



2130.

2129. 1. eset: A két metszősíkot elválasztja a gömb középpontja. Tekintsük a 2128/I. ábrát. Pitagorasz tétele a PLK , illetve a QMK derékszögű háromszögekre: $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ és $R^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + 20^2 = (6 - d_1)^2 + 25^2 \Rightarrow d_1 = 21,75 > 6$, ez nem lehet.

2. eset: A két metszősíkot nem választja el a gömb középpontja. Tekintsük a 2128/II. ábrát. Pitagorasz tétele a PLK , illetve a QMK derékszögű háromszögekre: $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ és $R^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow d_1^2 + 20^2 = (d_1 - 6)^2 + 25^2 \Rightarrow d_1 = 21,75 \Rightarrow d_2 = 15,75$ és $R = \underline{29,55 \text{ cm}}$.

2130. $BL = BK \cdot \cos \varphi \approx 4303,51 \text{ km}$; $i = \frac{1}{360^\circ} \cdot 2 \cdot BL \cdot \pi \Rightarrow i \approx \underline{75,11 \text{ km}}$.

2131. a) $A = 4900\pi \text{ cm}^2 \approx \underline{15\,394 \text{ cm}^2}$; b) $A = 5,76\pi \text{ cm}^2 \approx \underline{18,1 \text{ cm}^2}$; c) $A \approx 1082,28\pi \text{ m}^2 \approx \underline{3400,08 \text{ m}^2}$.

2132. a) $R \approx \underline{2 \text{ m}}$; b) $R \approx \underline{4,53 \text{ dm}}$; c) $R \approx \underline{9,46 \text{ cm}}$.

2133. a) Négyeszeresére nő. b) Kilenceszeresére nő. c) k^2 -szeresére változik.

2134. $t \approx \underline{292 \text{ m}^2}$.

2135. $t \approx \underline{169\,968\,121,3 \text{ km}^2}$ ($\approx 1,7 \cdot 10^8 \text{ km}^2$).

2136. $A_k - A_b \approx \underline{236,75 \text{ cm}^2}$.

2137. $\frac{A - A'}{A} = 1 - \frac{A'}{A} = 1 - \frac{4(r - 0,8)^2 \pi}{4r^2 \pi} = 1 - \left(\frac{r - 0,8}{r}\right)^2 = 1 - \left(\frac{11,2}{12}\right)^2 \approx 0,13 \Rightarrow 13\%$ -kal lett

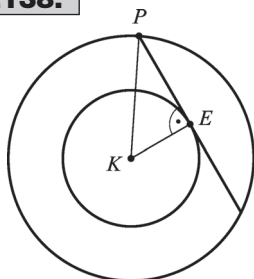
kisebb a csapágygolyó felszíne.

2138. Tekintsük a gömböknek az érintősíkra merőleges, a koncentrikus gömbök középpontján áthaladó síkmetszetét. KE a kisebb, KP a nagyobb koncentrikus gömb, PE a harmadik gömb sugara. Pitagorasz tétele a PKE derékszögű háromszögre: $KP^2 = KE^2 + EP^2 \Rightarrow \underline{A_n - A_k} = 4KP^2 \cdot \pi - 4KE^2 \cdot \pi = 4\pi(KP^2 - KE^2) = 4\pi \cdot EP^2 = \underline{A_3}$.

2139. Pitagorasz tétele szerint: $r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$. $A_3 = 4\pi \cdot r_3^2 = 4\pi \cdot (r_1^2 + r_2^2) = 4\pi \cdot r_1^2 + 4\pi \cdot r_2^2 = A_1 + A_2$.

2140. a) $V \approx \underline{7,24 \text{ mm}^3}$; b) $V \approx \underline{0,113 \text{ dm}^3}$; c) $V \approx 2000 \text{ dm}^3 = \underline{2 \text{ m}^3}$; d) $V \approx 7643,67 \text{ cm}^3 \approx \underline{7,64 \text{ dm}^3}$.

2141. a) $R \approx \underline{5,3 \text{ m}}$; b) $R \approx \underline{6,13 \text{ dm}}$; c) $R \approx \underline{7,16 \text{ cm}}$.

2138.

2142. $V \approx \underline{1662,95 \text{ cm}^3}$.

2143. $V = \frac{20}{11,38} = 1,757 \text{ dm}^3$. $V_{\text{gömb}} \approx 523,6 \text{ cm}^3 \approx 0,524 \text{ dm}^3$.

$n = \frac{V}{V_{\text{gömb}}} = \frac{1,757}{0,524} \approx 3,35 \Rightarrow \underline{3 \text{ db}}$ ólomgolyót lehet önteni.

2144. $V = \frac{37,5}{7,2} = 5,21 \text{ dm}^3$.

$V = \frac{4}{3}(R^3 - (R - d)^3)\pi \Rightarrow 5,21 = \frac{4}{3}(R^3 - (R - 0,4)^3)\pi =$

$= \frac{4}{3} \cdot 0,4 \cdot (3R^2 - 1,2R + 0,16) \cdot \pi \Rightarrow 0 = 3R^2 - 1,2R - 2,95 \Rightarrow R_1 < 0$, ez nem lehet. $R_2 = 1,21$. A vasgolyó átmérője $2R = \underline{2,42 \text{ dm}}$.

2145. $r_1 = 2R \Rightarrow V_1 = 8V$, nyolcszorosára; $r_2 = 3R \Rightarrow V_2 = 27V$, huszonhétyszeresére; $r_3 = nR \Rightarrow V_3 = n^3V$, n^3 -szörösére változik a térfogat.

2146. $V = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot \pi}{3} \approx 904,78 \text{ cm}^3 \Rightarrow m = \rho \cdot V = 0,8 \cdot 904,78 \approx 723,82 \text{ g} \approx \underline{0,72 \text{ kg}}$.

2147. $V = \frac{4 \cdot 11,8^3 \cdot \pi}{3} \approx 6882,3 \text{ cm}^3 \Rightarrow m = \rho \cdot V = 7,8 \cdot 6882,3 \approx 53\,682,1 \text{ g} \approx \underline{53,7 \text{ kg}}$.

2148. A lebegés feltétele: $\frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \cdot 7,5 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow 6,5R^3 = 7,5r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{13}{15}} R$.

2149. Az úszás feltétele: $\frac{4}{3} \pi (16^3 - 15,7^3) \cdot \rho = \frac{2}{3} \pi \cdot 16^3 \Rightarrow \rho = \frac{16^3}{2(16^3 - 15,7^3)} = 9,06 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

2150. $20\,000 = \frac{4}{3} R^3 \pi \Rightarrow R = 16,84 \text{ m} \Rightarrow d = \underline{33,68 \text{ m}}$ a gáztartály belső átmérője. $260\,000 = \frac{4}{3} \pi ((16,84 + x)^3 - 16,84^3) \cdot 7,5 \cdot 10^3 \Rightarrow x \approx 0,0097 \text{ m} \approx \underline{9,7 \text{ mm}}$ a tartály falvastagsága.

2151. a) $V \approx \underline{523,6 \text{ m}^3}$; b) $V \approx \underline{4,19 \text{ cm}^3}$; c) $V \approx \underline{2,97 \text{ dm}^3}$; d) $V \approx 0,001381 \text{ m}^3 \approx \underline{1,38 \text{ dm}^3}$.

2152. a) $A \approx \underline{77,37 \text{ cm}^2}$; b) $A \approx \underline{554,86 \text{ m}^2}$; c) $A \approx \underline{122,95 \text{ dm}^2}$; d) $A \approx 0,8978 \text{ m}^2 \approx \underline{89,78 \text{ dm}^2}$.

2153. $V = \frac{m}{\rho} = \frac{4}{0,6} \approx \underline{6,67 \text{ dm}^3}$ a golyó térfogata. $\Rightarrow R \approx 1,17 \text{ dm} \Rightarrow A \approx 4 \cdot 1,17^2 \cdot \pi \approx \underline{17,13 \text{ dm}^2}$ a golyó felszíne.

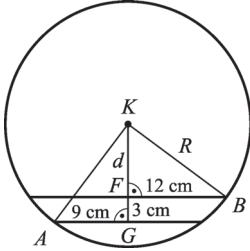
2154. $V_\sigma = 1 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ mm}^3$; $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \Rightarrow r = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. $V = \frac{4 \cdot 1,5^3 \cdot 10^{-9} \cdot \pi}{3} \approx 14,14 \cdot 10^{-9} \text{ mm}^3 \Rightarrow n = \frac{V_\sigma}{V} \approx \underline{7 \cdot 10^{10} \text{ db}}$.

2155. $r_H = \frac{3}{11} r_F \Rightarrow A_H = 4r_H^2 \pi = 4 \cdot \frac{9}{121} r_F^2 \pi = \frac{9}{121} A_F \Rightarrow \frac{A_H}{A_F} = \frac{9}{121}$. $V_H = \frac{4r_H^3 \pi}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{27}{1331} r_F^3 = \frac{27}{1331} V_F \Rightarrow \frac{V_H}{V_F} = \frac{27}{1331}$.

2156. Bármely két gömb hasonló. $\frac{V'}{V} = 2 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow A' = \sqrt[3]{4} \cdot 40 \approx \underline{63,5 \text{ cm}^2}$.

2157. Bármely két gömb hasonló. $\frac{A'}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 30 = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx \underline{10,6 \text{ cm}^3}$.

2158. $R_2 = R_1 + 2 \text{ dm}$; $V_2 = V_1 + 1132,5 \text{ dm}^3$; $V_1 = \frac{4}{3} R_1^3 \pi$; $V_2 = \frac{4}{3} R_2^3 \pi = \frac{4}{3} (R_1 + 2)^3 \pi$.
 $V_2 - V_1 = \frac{4}{3} \pi [(R_1 + 2)^3 - R_1^3] = \frac{4}{3} \pi \cdot 2 \cdot [R_1^2 + R_1(R_1 + 2) + (R_1 + 2)^2] = \frac{8}{3} \pi (3R_1^2 + 6R_1 + 4) = 1132,5 \text{ dm}^3 \Rightarrow 3R_1^2 + 6R_1 - 131,18 = 0 \Rightarrow (R_1)_1 < 0$, ez nem lehet. $(R_1)_2 = \underline{5,69 \text{ dm}}$ a gömb sugara.

2161.

$$\mathbf{2159.} \quad 4\pi \cdot [(r_2 + 0,9)^2 + r_2^2] = 5672,8 \Rightarrow 0 = 2r_2^2 + 1,8r_2 - 450,62 \Rightarrow \Rightarrow (r_2)_1 < 0, \text{ ez nem lehet. } (r_2)_2 = \underline{14,57 \text{ dm}} \Rightarrow r_1 = \underline{15,47 \text{ dm.}}$$

$$\mathbf{2160.} \quad r_1 = r_2 + 1,3 \text{ dm.} \quad V_1 - V_2 = 1683,72 = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_2^3) = \\ = \frac{4}{3} \pi (r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{4}{3} \pi \cdot 1,3 \cdot [(r_2 + 1,3)^2 + (r_2 + 1,3)r_2 + r_2^2] = \\ = \frac{5,2}{3} \pi (3r_2^2 + 3,9r_2 + 1,69) \Rightarrow r_2^2 + 1,3r_2 - 102,5 = 0 \Rightarrow (r_2)_1 < 0, \text{ ez nem lehet. } (r_2)_2 \approx \underline{9,5 \text{ dm}} \Rightarrow r_1 \approx \underline{10,8 \text{ dm.}}$$

2161. Vetítsük merőlegesen a síkmetszeteket a gömb középpontján átmenő, a metsző síkora merőleges síkra. Pitagorasz tétele az AGK és a BFK derékszögű háromszögekre:

$$R^2 = 9^2 + (3 + d)^2 \quad \text{és} \quad R^2 = 12^2 + d^2 \Rightarrow 9^2 + (3 + d)^2 = 12^2 + d^2 \Rightarrow d = 9 \text{ cm} \Rightarrow R = 15 \text{ cm} \Rightarrow V = \\ = \frac{4}{3} \pi \cdot 15^3 = 4500\pi = 14\,137,17 \text{ cm}^3 \approx \underline{14,14 \text{ dm}^3}.$$

Összetett térgeometriai alakzatok

Egymáshoz illesztett testek

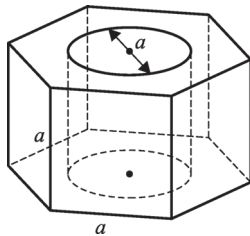
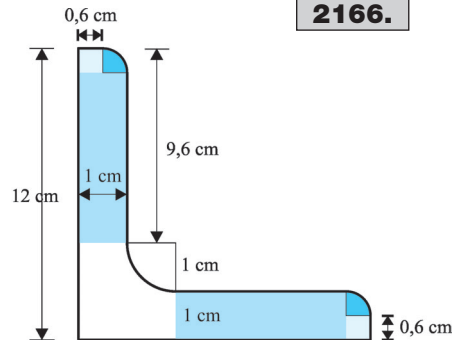
$$\mathbf{2162.} \quad V = V_{\text{henger}} + V_{\text{csonkakúp}} \approx 7,2 \text{ cm}^3; \quad m = \rho \cdot V \approx \underline{56,55 \text{ g.}}$$

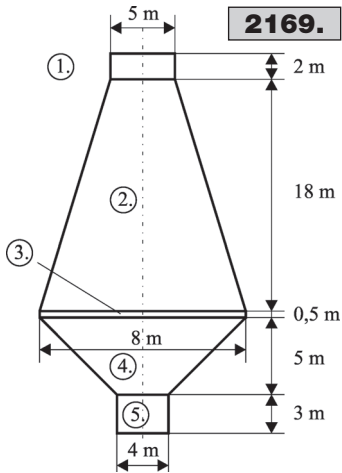
$$\mathbf{2163.} \quad V = V_{\text{henger}} + 2V_{\text{félgömb}} \approx 0,07\pi \approx \underline{0,222 \text{ m}^3}.$$

$$\mathbf{2164.} \quad V = V_{\text{henger}} + V_{\text{félgömb}} \approx 10,58\pi \approx \underline{33,24 \text{ cm}^3}.$$

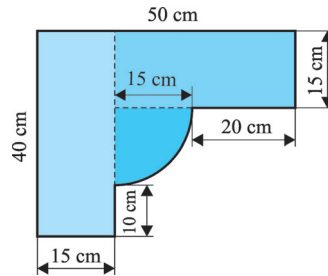
$$\mathbf{2165.} \quad V = V_{\text{hasáb}} - V_{\text{henger}} \approx 14,5 \text{ cm}^3; \quad m = n \cdot V \cdot \rho \approx \underline{113,11 \text{ kg.}}$$

2166. A keresztmetszet területe: $T = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,4^2 \pi + 2 \cdot 1 \cdot 9,6 + 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \pi \approx \approx \underline{23,15 \text{ cm}^2}$. Az 1 méteres darab térfogata: $V = 23,15 \cdot 100 \approx \underline{2315 \text{ cm}^3}$. Az 1 méteres darab tömege: $m = 2315 \cdot 7,8 \approx \underline{18\,057 \text{ g}} \approx \underline{18,06 \text{ kg.}}$

2165.**2166.**

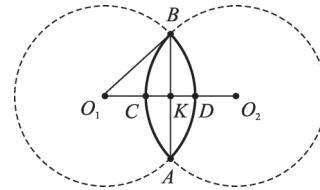


2169.



2170.

2171.



2167. A csonkakúp alakú részek alkotója: $a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ dm. $A = 2 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 3 + 2 \cdot (4 + 2) \cdot \sqrt{13} \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \approx 311,85 \text{ dm}^2 \approx \underline{3,12 \text{ m}^2}$.

2168. A kanna teljes térfogata: $\approx 67,39 \text{ dm}^3 \approx \underline{67,41}$.

A csonkakúp alkotója: $a = \sqrt{0,8^2 + (2 - 0,4)^2} \approx \underline{1,79 \text{ dm}}$.

A kanna felszíne: $A \approx \underline{90,49 \text{ dm}^2}$. A felbecsült lemezsükséglet: $A' = 1,05A \approx \underline{95,45 \text{ dm}^2}$.

2169. $V = 2,5^2 \pi \cdot 2 + \frac{18}{3} \pi \cdot (2,5^2 + 2,5 \cdot 4 + 4^2) + 4^2 \pi \cdot 0,5 + \frac{5}{3} \pi \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) + 2^2 \pi \cdot 3 \approx \underline{856,6 \text{ m}^3}$.

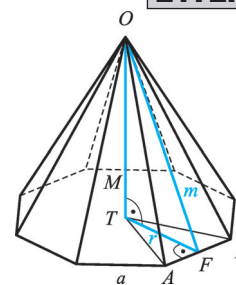
2170. A keresztmetszet területe: $T = 40 \cdot 15 + 35 \cdot 15 + \frac{1}{4} \cdot 15^2 \cdot \pi \approx \underline{1301,71 \text{ cm}^2}$.

A párkány térfogata: $V = 1301,71 \cdot 100 \approx \underline{0,13 \text{ m}^3}$.

A párkány tömege: $m = 0,13 \cdot 2440 = \underline{317,62 \text{ kg}}$.

2171. $AB = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}$. $CD = 0,6 \text{ cm} \Rightarrow DK = CK = 0,3 \text{ cm} \Rightarrow O_1K = R - 0,3 \text{ cm}$. Pitagorasz-tétel az $O_1KB\Delta$ -re: $R^2 = (R - 0,3)^2 + 4^2 \Rightarrow \underline{R \approx 26,82 \text{ cm}}$.

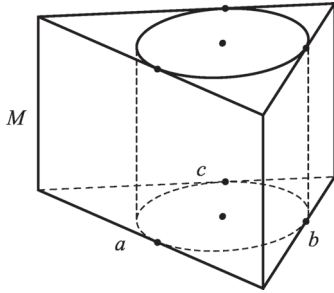
2172. $T_{\text{palást}} = A_{\text{félgömb}} \Rightarrow 8 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = 2R^2 \pi \Rightarrow m \approx \underline{13,09 \text{ m}}$. $TFB\Delta$ -ből $\text{tg } 22,5^\circ = \frac{a}{2r} \Rightarrow r \approx \underline{1,61 \text{ m}}$. Pitagorasz-tétel a TFO derékszögű háromszögre: $M^2 + r^2 = m^2 \Rightarrow M \approx \underline{12,99 \text{ m}}$.



2172.

Egymásba írt testek

II

2173.

$$\mathbf{2173.} \quad T_{\text{alap}} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} = 330 \text{ cm}^2.$$

$$M = \frac{V_{\text{hasáb}}}{T_{\text{alap}}} = \underline{\underline{60,15 \text{ cm}}}. \text{ Az alapháromszögbe írható kör sugara:}$$

$$r = \frac{T_{\text{alap}}}{s} = 6,6 \text{ cm.} \quad V_{\text{henger}} = 6,6^2 \cdot \pi \cdot 60,15 \approx \underline{\underline{8231,4 \text{ cm}^3}}.$$

$$\mathbf{2174.} \quad T_{\text{nyolcszög}} = 8 \frac{R^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} \approx \underline{\underline{14,96 \text{ dm}^2}}.$$

$$V_{\text{oszlop}} = T_{\text{nyolcszög}} \cdot M \approx \underline{\underline{74,81 \text{ dm}^3}}.$$

$$\text{Az oszlop tömege: } m_{\text{oszlop}} = 74,81 \cdot 7,2 \approx \underline{\underline{538,65 \text{ kg}}}.$$

2175. Legyen a gerenda-keresztmetszet körének átmérője

$2R$. A körbe írható legnagyobb területű négyzet területe: $T_{\text{négyzet}} = 2R^2 = \underline{\underline{0,045 \text{ m}^2}}$. A hasáb térfogata: $V_{\text{hasáb}} = T_{\text{négyzet}} \cdot M = \underline{\underline{157,5 \text{ dm}^3}}$. A henger térfogata: $V_{\text{henger}} = R^2 \pi \cdot M \approx \underline{\underline{247,4 \text{ dm}^3}}$. A hulladék térfogata: $V_{\text{hulladék}} = V_{\text{henger}} - V_{\text{hasáb}} \approx \underline{\underline{89,9 \text{ dm}^3}}$.

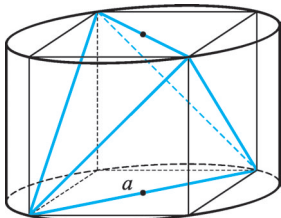
2176. $V_{\text{henger}} = 2R^3 \pi \Rightarrow R \approx 5 \text{ m}$. Az R sugarú körbe írható szabályos nyolcszög a oldalára: $\frac{a}{2} = R \cdot \sin 22,5^\circ \Rightarrow \underline{\underline{a = 3,83 \text{ m}}}$ a hasáb alapéle és $o = M = 2R = \underline{\underline{10 \text{ m}}}$ a hasáb oldaléle.

2177. Az r sugarú körbe írható legnagyobb területű négyzet oldala $a = r\sqrt{2}$. A hasáb oldaléle: $o = m$. Egy oldallap területe: $T = r \cdot m \cdot \sqrt{2}$.

2178. A két test alaplapjaira: a kör sugara r , a beírt négyzet átlója $2r$. A henger alapkörének sugara: $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. A henger magassága: $M = a$. A henger térfogata: $V_{\text{henger}} = r^2 \pi \cdot M = \frac{a^2}{2} \cdot \pi \cdot a = \underline{\underline{\frac{a^3 \pi}{2}}}$.

2179. A tetraéder elhelyezhető egy kockában úgy, hogy szemközti élei a kocka két-két szemköztes lapjának egymásra merőleges lapátloi. \Rightarrow A keresett henger a kocka köré írható hengernek felel meg. A henger alapkörének sugara: $\frac{a}{2}$. A henger magassága (a kocka éle):

$$\frac{a}{\sqrt{2}}. \text{ A henger térfogata: } V_{\text{henger}} = \frac{a^2}{4} \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{a^3 \sqrt{2} \pi}{8}}}.$$

2179.

$$\mathbf{2180.} \quad \text{A csonkagúla alaplapjának területe: } T = 8 \frac{R^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} =$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{2} R^2}}. \text{ A csonkagúla fedőlapjának területe: } t = 8 \frac{r^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} =$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{2} r^2}}. \text{ A csonkagúla térfogata: } V_{\text{csonkagúla}} = \frac{M}{3} (T + \sqrt{Tt} + t) =$$

$$= \frac{M}{3} 2\sqrt{2} (R^2 + Rr + r^2) = \underline{\underline{554\sqrt{2} \approx 783,47 \text{ dm}}}$$